



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**MODELÝ PLASTICKÉ ZÓNY NA ČELE TRHLINY**

MODELS OF PLASTIC ZONE ON THE CRACK FRONT

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Jindřich Surovec

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

BRNO 2020

## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Jindřich Surovec**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### Modely plastické zóny na čele trhliny

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Provedení literární rešerše zaměřené na stanovení tvaru malé plastické zóny na špici trhliny namáhané tahovým a smykovým napětím za podmínek platnosti lineární lomové mechaniky.

#### Cíle bakalářské práce:

Grafické znázornění tvaru plastické zóny v okolí špice trhliny namáhané tahovým a smykovým napětím v nekonečném tělese pro podmínky plasticity HMM nebo  $\max \tau$ . Porovnání tvarů plastické zóny pro rovnou a vyhnutou trhlínu.

#### Seznam doporučené literatury:

ANDERSON, T. L.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications, CRC Press, 2010, ISBN-- - 8493-4260-0.

KUNZ, J.: Aplikovaná lomová mechanika. ČVUT Praha, 2005, ISBN: 80-01-02248-X.

BROEK, D.: Elementary Engineering Fracture Mechanics. Kluwer Academic Publishers Group, The Netherlands, 1982, ISBN: 90-247-2580-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zabývá analytickým stanovením velikosti a tvaru plastické zóny v okolí špičky trhliny pro podmínky plasticity  $\text{HMH}$  a  $\max \tau$ . Dále se zabývá stanovením charakteristických parametrů vyhnuté trhliny. Rešeršní část slouží k objasnění některých základních pojmů potřebných pro pochopení analytického modelu, poté následuje samotné analytické řešení.

## **ABSTRACT**

This bachelor thesis is about analytical determination of plastic zone shape at the crack tip using Von Mises and  $\max \tau$  yield criterions. Next goal is obtain characteristic parameters of kinked crack. Theoretical part clarifies some basic concepts needed to understand the analytical models, then follows the analytical solution itself.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

trhlina, velikost a tvar plastické zóny, vyhnutá trhlina

## **KEYWORDS**

crack, plastic zone shape, kinked crack

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

SUROVEC, Jindřich. Modely plastické zóny na čele trhliny. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125365>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jana Horníková.

## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych chtěl poděkovat paní doc. Ing. Janě Horníkové, Ph.D. za odborné vedení, cenné připomínky a vstřícný přístup při vypracování bakalářské práce.

## **ČESTNÉ PROHLÁŠ ENÍ**

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením doc. Ing. Jany Horníkové, Ph.D a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne

.....  
Jindřich Surovec

# OBSAH

<b>1. Úvod .....</b>	<b>10</b>
<b>2. Historické pozadí .....</b>	<b>10</b>
<b>3. Potřebné pojmy ke stanovení plastické zóny .....</b>	<b>10</b>
3.1. Rozdělení lomové mechaniky .....	11
3.2. Lineární lomová mechanika .....	11
3.3. Trhlina .....	12
3.3.1. Zatěžovací módy .....	13
3.4. Součinitel intenzity napětí .....	14
3.4.1. Pole napětí v okolí čela trhliny .....	15
3.5. Rovinná napjatost a rovinná deformace .....	16
3.6. Podmínky plasticity .....	16
3.6.1. Hypotéza HMM .....	17
3.6.2. Trescova hypotéza maximálního smykového napětí $\max \tau$ .....	17
3.7. Vyhnutá trhlina .....	18
<b>4. Plastická zóna malého rozsahu na čele trhliny .....</b>	<b>18</b>
4.1. Důsledky plastické zóny .....	19
4.2. Metody stanovení plastické zóny .....	19
4.2.1. Experimentální stanovení .....	20
4.2.2. Numerické řešení .....	21
<b>5. Analytické řešení .....</b>	<b>22</b>
5.1 Mód I .....	23
5.1.1 Vyhodnocení módu I .....	23
5.1.3. Efektivní součinitel intenzity napětí .....	24
5.2 Mód II .....	25
5.2.1 Vyhodnocení módu II .....	26
5.3 Mód III .....	26
5.3.1 Vyhodnocení módu III .....	27
<b>6. Velikost plastické zóny vyhnuté trhliny .....</b>	<b>27</b>
6.1. Délka plastické zóny ve směru šíření .....	28
6.2. Výška plastické zóny vyhnuté trhliny .....	29
6.3. Lokální součinitele intenzity napětí .....	31
<b>7. Závěr .....</b>	<b>33</b>
<b>8. Seznam použité literatury .....</b>	<b>33</b>

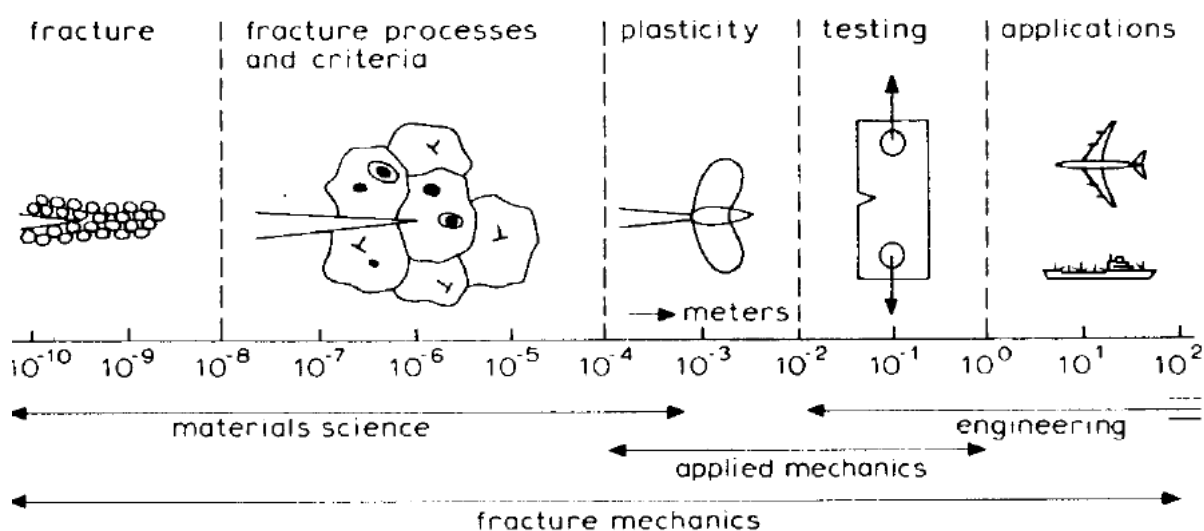




# 1. ÚVOD

V současné společnosti, kde se hojně využívají komplexní technické vymoženosti (například letecká doprava, energie z atomových elektráren nebo třeba raketoplány), se co nejvíce snažíme eliminovat selhání těchto zařízení. Jedna z možných příčin selhání může být trhlina, a právě touto tematikou se zabývá multidisciplinární obor lomová mechanika. Oproti klasické pružnosti pevnosti můžeme díky poznatkům lomové mechaniky dimenzovat součásti s uvážením výskytu trhliny, odhadnout životnost součásti s trhlinou, posoudit bezpečnost, naplánovat opravy a prohlídky a v neposlední řadě vybrat vhodný materiál. Pro správnou aplikaci lomové mechaniky platí řada podmínek, jedna z nich je, že při aplikaci lineární lomové mechaniky nesmí být plastická zóna na čele trhliny příliš velká. A právě o velikosti a tvaru plastické zóny na čele trhliny pojednává tato bakalářská práce.

Lomová mechanika je komplexní obor, propojující materiálové vědy, aplikovanou mechaniku a inženýrství. Jednoduché znázornění propojení těchto oborů je na obr.1.1.



Obr. 1.1: zjednodušené znázornění jednotlivých oblastí lomové mechaniky [1]

## 2. HISTORICKÉ POZADÍ

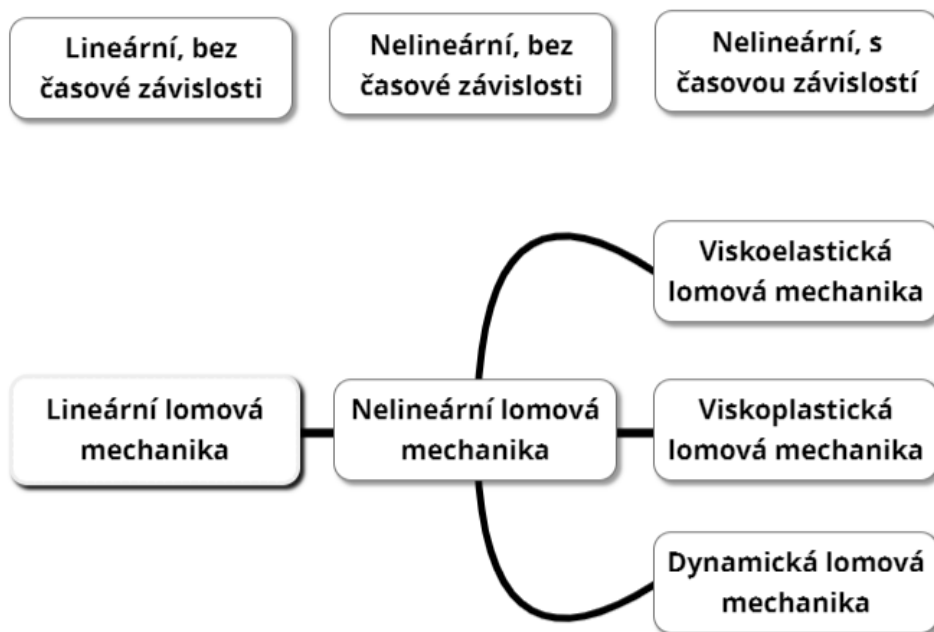
Velmi významného pokroku v oblasti lomové mechaniky se dosáhlo během 2. světové války, kdy se ukázalo, že za mnoho havárií může právě trhlina. Důležitost tohoto oboru také naznačila ekonomická studie z roku 1978, která odhadla škody způsobené trhlínami na 119 miliard dolarů, což činilo 4 % hrubého domácího produktu. Dále studie odhadla možnost snížení těchto škod o 35 miliard dolarů, v případě aplikování poznatků z lomové mechaniky a následné snížení škod o 28 miliard dolarů, kdyby se pokračovalo v prohlubování znalostí lomové mechaniky [2].

## 3. POTŘEBNÉ POJMY KE STANOVENÍ PLASTICKÉ ZÓNY

Abychom lépe porozuměli významu plastické zóny na čele trhliny za předpokladu LELM, musíme nejdříve popsat některé základní pojmy, důležité poznatky lomové mechaniky a také uvést předpoklady platnosti lineární lomové mechaniky.

### 3.1. Rozdělení lomové mechaniky

Lomovou mechaniku můžeme rozdělit na lineárně elastickou (LELM) a elasto-plastickou (EPLM) lomovou mechaniku, díky které můžeme analyzovat i materiály vykazující časově nezávislé nelineární chování. Další rozšíření zahrnují jak nelineární, tak časově závislé materiály (obr. 3.1.). Ovšem i tyto značně komplikovanější přístupy vychází z LELM a proto je její pochopení zásadní. Je nezbytné zdůraznit, že v této práci se budu zabývat pouze lineárně elastickou lomovou mechanikou.



Obr. 3.1: Zjednodušené rozdělení lomové mechaniky [2]

### 3.2. Lineární lomová mechanika

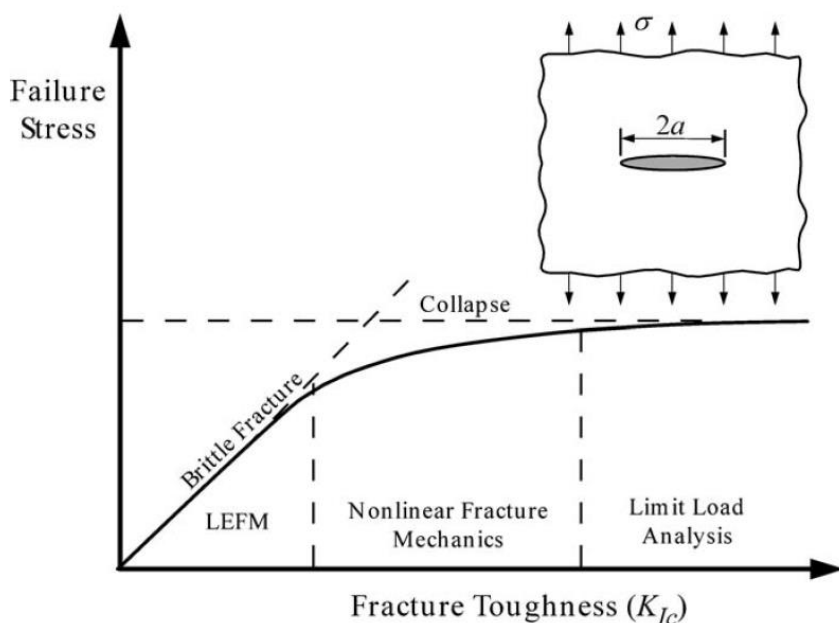
Při analýze tělesa s trhlinou můžeme využít dva možné přístupy. Prvním je energetické kritérium (někdy také nazýváno Griffithovo kritérium), které tvrdí, že se trhlina začne šířit, pokud energie uvolněná při prodloužení trhliny, tzv. hnací síla trhliny  $G$ , bude větší než odpor materiálu proti šíření trhliny  $G_C$ , což je materiálová charakteristika. Pro trhlinu délky  $2a$  v nekonečném tělese zatíženém tahovým napětím  $\sigma$  je  $G$  dáno vztahem:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} \quad 3.1$$

Druhým přístupem je součinitel intenzity napětí (K-faktor), který zcela popisuje stav napětí v okolí čela trhliny jediným parametrem  $K$ , který je oproti hnací síle trhliny  $G$  lokálního charakteru, proto je tento přístup vhodný ke stanovení velikosti plastické zóny a bude mu věnována samostatná kapitola [2].

Na obr. 3.2 můžeme vidět schématické znázornění použitelnosti LELM. U materiálů s nízkou lomovou houževnatostí je řídicím mechanismem křehký lom a velikost kritického napětí je lineárně závislá na  $K_{IC}$ . Pro materiály s vysokou hodnotou lomové houževnatosti

LELM neplatí a lom je řízen plastickými charakteristikami materiálu. Při středních hodnotách lomové houževnatosti dochází k přechodu mezi křehkým lomem za lineárních podmínek a plasticitou a je nutné použít EPLM [2].



Obr. 3.2: Vliv lomové houževnatosti na mechanismus porušení [2]

Materiály, které typicky vykazují lineární elastické lomové chování, jsou např.: vysokopevnostní oceli, precipitačně vytvrzený hliník, některé polymery, keramické monolity, keramické kompozity [2].

### 3.3. Trhlina

Jak již bylo řečeno, trhlina může být častou příčinou selhání funkce součástí. Charakteristické mezní stavy (MS) pro součásti s trhlinou jsou MS stability šíření trhlin, MS porušení, MS únavy materiálu, MS lomu a MS trhliny. Tyto stavy jsou velmi nebezpečné, neboť jejich matematický popis je poměrně složitý, predikce je i nyní v mnohých ohledech nedostačující a v neposlední řadě lom může nastat velmi náhle a součást okamžitě ztratí svoji funkčnost. Tento stav nastane, pokud se trhlina dostane do fáze nestabilního šíření, kdy se trhlina šíří rychlostí zvuku daného materiálu. Pro popis používáme následující pojmy [3].

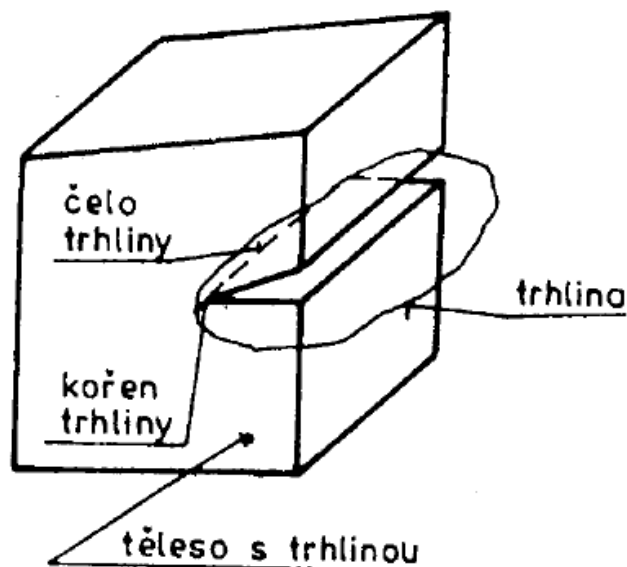
**Trhlina** je oblast tělesa, kde došlo k porušení celistvosti materiálu.

**Čelo trhliny** je křivka oddělující porušenou a neporušenou oblast materiálu.

**Špice trhliny** reprezentuje jeden bod čela trhliny.

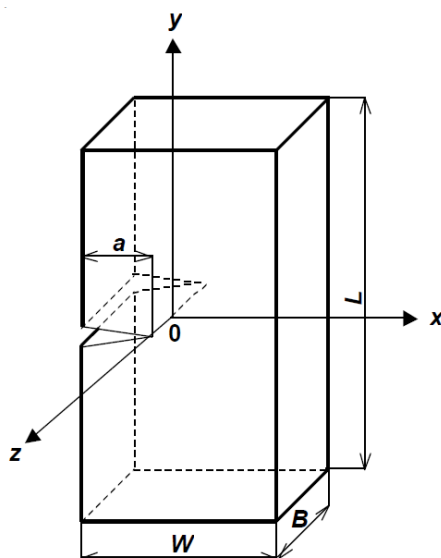
**Lomová plocha trhliny** jsou nově vzniklé povrchy vytvořené trhlinou, jejich průsečík je čelo trhliny.

**Nukleační místo** je oblast na povrchu tělesa, na které můžeme identifikovat první známky porušení celistvosti součásti [3].



Obr. 3.3: těleso s trhlinou se znázorněním základních pojmů [3]

Pro lepší orientaci v lomové mechanice se zavádí kartézský souřadný systém uvedený na obr. 3.4.. Šířku tělesa značíme  $W$  a je orientována ve směru osy  $x$ . Ve směru osy  $y$  je zavedena délka tělesa  $L$  a rovnoběžně s osou  $z$  je zavedena tloušťka tělesa, která je rovnoběžná s čelem trhliny [4].



Obr. 3.4: Zavedení souřadného systému pro těleso s trhlinou [4]

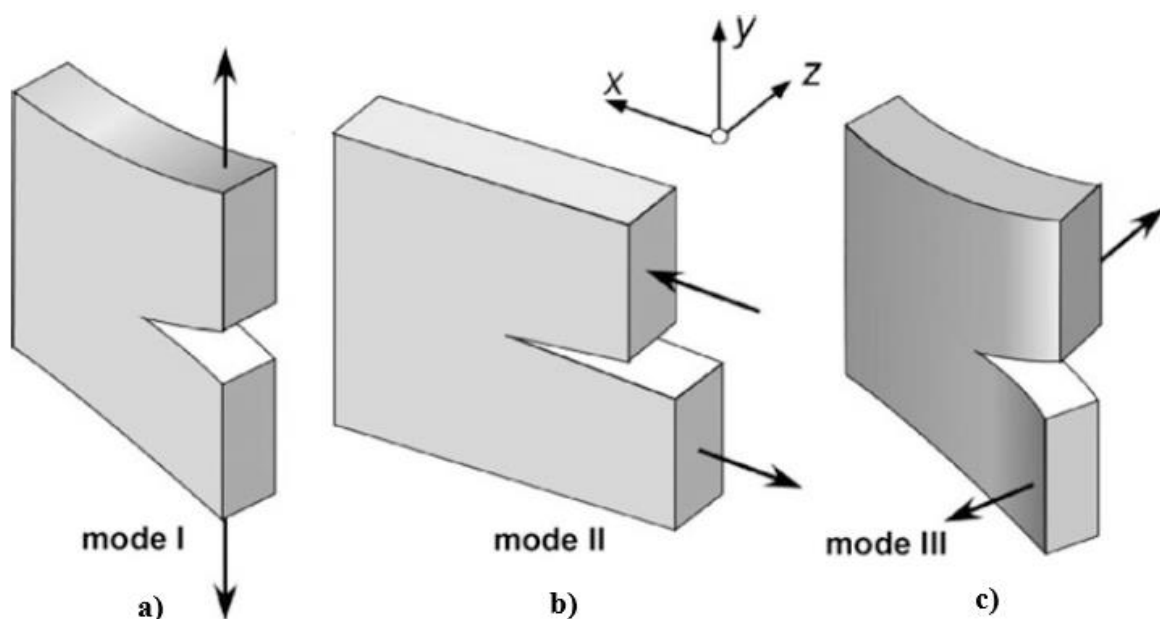
### 3.3.1. Zatěžovací módy

Při řešení napjatosti využíváme principu superpozice, kde výsledné řešení sestává z dílčích řešení pro dané zatěžovací módy. Kombinací jednotlivých konfigurací se řeší všechna reálná zatížení. Zatěžovací módy charakterizují způsob namáhání.

**Mód I – Tahový** (opening mode) je charakteristický zatěžovací silou působící normálově na rovinu lomu. Je ze všech módů nejvýznamnější a nejkritičtější, proto je v literatuře nejdetailněji popsán. Šíření trhliny se uskutečňuje pomocí složky tenzoru napětí  $\sigma_y$ , obr. 3.4 a.

**Mód II – Rovinný smykový** (Sliding mode) je charakteristický zatěžovací silou působící rovnoběžně s rovinou lomu, ve směru šíření trhliny. Šíření trhliny se uskutečňuje pomocí složky tenzoru napětí  $\tau_{xy}$ , obr. 3.4 b.

**Mód III – Antirovinný smykový** (Tearing mode) je charakteristický zatěžovací silou působící rovnoběžně s rovinou lomu, kolmo na směr šíření trhliny. Šíření trhliny se uskutečňuje pomocí složky tenzoru napětí  $\tau_{yz}$ , obr. 3.4 c [4].



Obr 3.5: módy namáhání těles [5]

### 3.4. Součinitel intenzity napětí

Jeden z hlavních úkolů lomové mechaniky je popis stability šíření trhliny. Pro tento účel se používají různé mechanické parametry, které musí popisovat způsob, jak je těleso zatíženo, a velikost tohoto zatížení, zbytkové napětí, typ namáhání, rozměry tělesa, trhlínu (poloha, tvar, rozměr) a mechanické vlastnosti materiálu, z nichž jsou nejdůležitější modul pružnosti a Poissonovo číslo. V praxi se nejběžněji používá součinitel intenzity napětí  $K$ . Tento přístup umožní jednoznačně definovat trhlínu v materiálech, a to pomocí délky trhliny  $a$  a složky napětí, která je pro daný mód zatěžování charakteristická.

Pro nekonečně velké těleso se dají odvodit součinitele intenzity napětí pro dané zatěžovací módy.

$$K_I = \sigma_y \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad 3.2$$

$$K_{II} = \tau_{xy} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad 3.3$$

$$K_{III} = \tau_{yz} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad 3.4$$

kde  $\sigma$  a  $\tau$  jsou složky tenzoru napětí na špici trhliny charakteristické pro zátěžný mód

I přes porušení předpokladu malých deformací a malých posuvů poskytuje  $K$  součinitel dostatečně přesný popis napětí v okolí špice trhliny, protože jsou tyto předpoklady porušeny pouze v malé oblasti [2].

V případě zatížení více vnějšími silami můžeme využít princip superpozice a to tak, že sečteme všechny součinitele intenzity napětí  $K$  pro daný mód zatěžování od všech sil a momentů [4].

$$K_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} \quad (i = I, II, III) \quad (n = 1, 2, 3 \dots n) \quad 3.5$$

### 3.4.1. Pole napětí v okolí čela trhliny

K určení rozsahu a tvaru plastické zóny je zapotřebí znát pole napětí v okolí čela trhliny. Rozložení napětí je závislé na aplikovaném módu otevírání trhliny (obr. 3.4.). Pro všechny tři módy byly odvozeny rovnice, ve kterých jsou  $r$  a  $\theta$  souřadnicemi s pólem ve špici trhliny a  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  jsou součinitelé intenzity napětí. Pokud  $\theta=0^\circ$ , rovnice se zredukuje pouze na osu  $x$ , při  $\theta=90^\circ$  výsledek koresponduje s osou  $y$  [6].

#### Mód I

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \sigma_z &= 0 \text{ (rovinná napjatost)} \\ \sigma_z &= \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \text{ (rovinná deformace)} \end{aligned}$$

3.6 [2]

#### Mód II

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_z &= 0 \text{ (rovinná napjatost)} \\ \sigma_z &= \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \text{ (rovinná deformace)} \end{aligned}$$

3.7 [2]

#### Mód III

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

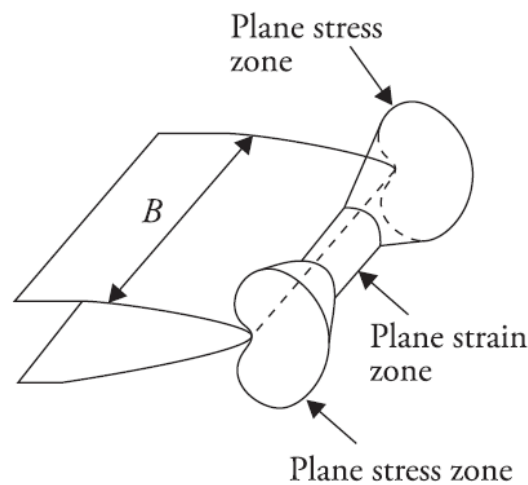
3.8 [2]

### 3.5. Rovinná napjatost a rovinná deformace

Na velikost plastické zóny má vliv několik faktorů, jeden z nich je stav napětí v tělese s trhlinou. Rovinná napjatost dominuje na okrajích tělesa a mění se na rovinnou deformaci se zvětšující se vzdáleností od okrajů (obr.3.6). Empiricky byla stanovena hodnota poměru poloměru plastické zóny  $r_p$  a tloušťky tělesa  $B$ , při které ve zkušebním tělese převládá rovinná deformace (3.9) [4].

$$\frac{r_p}{B} < 0,0637$$

3.9 [4]



Obr.3.6: Znáznornění plastické zóny na čele trhliny [7]

### 3.6. Podmínky plasticity

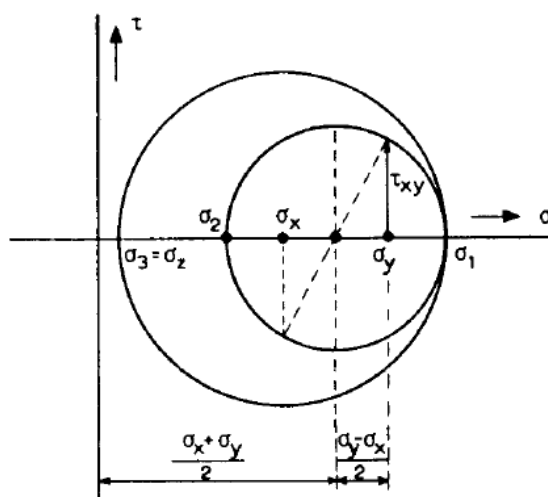
Tvar plastické zóny je možné určit z podmínek plasticity pomocí hlavních napětí. Tato hlavní napětí se vypočítají z Mohrových kružnic (obr. 3.7) a následně se využijí k výpočtu redukovaného napětí dosazením do podmínek plasticity max  $\tau$  nebo HMM. [8]

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 3.10$$

$$\sigma_3 = 0(RN) \quad 3.11$$

$$\sigma_3 = \mu(\sigma_x + \sigma_y)(RD) \quad 3.12$$





Obr. 3.7: výpočet hlavních napětí pomocí Mohrovy kružnice [1]

V případě módu III se vypočtou hlavní napětí z charakteristické rovnice, která se v daném případě zredukuje na:

$$\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad 3.13$$

### 3.6.1. Hypotéza HMM

Podstata hypotézy HMM je výpočet oktaedrického napětí, které porovnáváme s mezí kluzu materiálu  $R_{P0,2}$ . Podmínku plasticity HMM můžeme vyjádřit pomocí hlavních napětí ve tvaru [4]:

$$\sigma_{red}^{HMM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3)]^{\frac{1}{2}} = R_{P0,2} \quad 3.14$$

### 3.6.2. Trescova hypotéza maximálního smykového napětí max τ

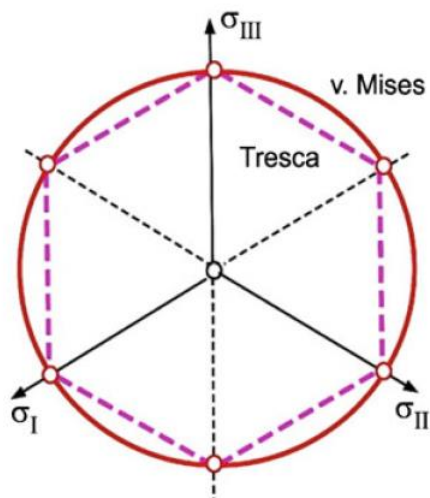
K meznímu stavu pružnosti dojde, pokud maximální smykové napětí dosáhne meze kluzu ve smyku, která je v tomto případě rovna poloviční hodnotě meze kluzu v tahu [4].

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} R_{P0,2} \quad 3.15$$

Podmínka plasticity max τ pro hlavní napětí  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$R_{p0,2} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad 3.16$$

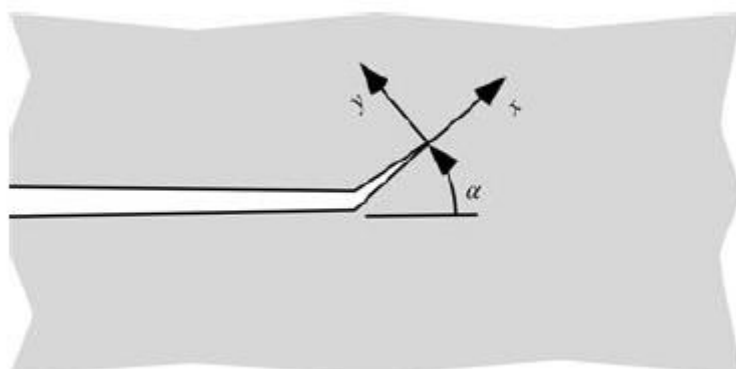
Hypotézy HMH a  $\max \tau$  zakreslíme v oktaedrické rovině (obr.3.6), odkud je zřejmé, že podmínka HMH je konzervativnější.



Obr.3.8: HMH a  $\max \tau$  podmínky plasticity v oktaedrické rovině [1]

### 3.7. Vyhnutá trhlina

Trhlina se v reálném tělese obecně šíří po zakřivené dráze. To může být způsobeno mimo jiné tím, že trhlina narazí na hranici zrna. V tomto případě šíření trhliny pokračuje cestou nejmenšího odporu, tudíž po hranici zrna, která je oslabena např. segregací. Další příčinou může být přítomnost sekundární fáze, ta trhlinu zastaví, jelikož může být tvrdší než matrice a snaží se ji obejít. [9]



Obr. 3.9: trhlina vyhnutá o úhel  $\alpha$  [2]

## 4. PLASTICKÁ ZÓNA MALÉHO ROZSAHU NA ČELE TRHLINY

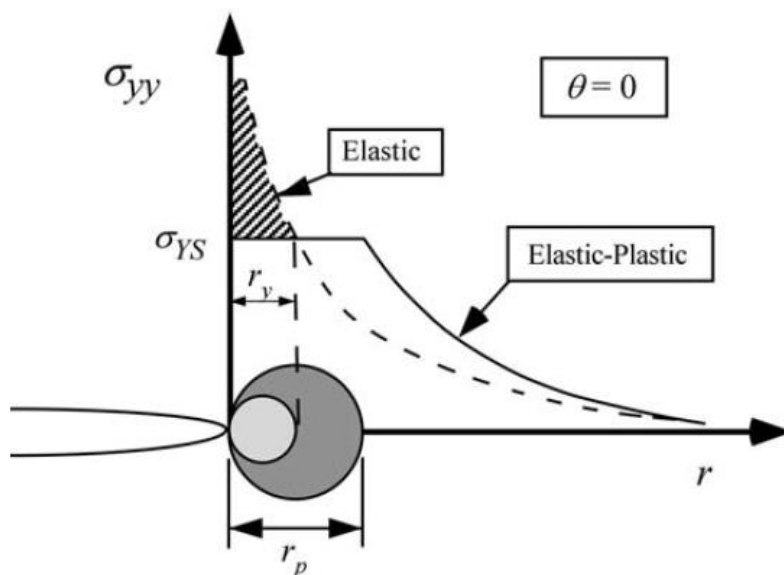
Při odvozování složek napětí v okolí čela trhliny se vycházelo z předpokladu elastického chování materiálu. Tento předpoklad se ukazuje jako nevyhovující, jelikož trhlinu můžeme považovat za vrub s poloměrem zaoblení, který se blíží k nule, proto je významným koncentrátorem napětí [3].

Z rovnic pro výpočet složek napětí v okolí čela trhliny (3.6, 3.7, 3.8) můžeme zpozorovat funkční závislost  $\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{r}}$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \sigma(r) = \infty$ . Z této rovnice je zřejmé, že by se napětí blížilo k nekonečnu, pokud bychom zkoumali blízké okolí čela trhliny, a tím by se vytvořila singularita, která není z fyzikálního hlediska přijatelná. V okolí špičky trhliny ve skutečnosti dochází k plastické deformaci materiálu, tam kde napětí překročí mez kluzu.

Se zvětšující se plastickou zónou rychle narůstá nepřesnost elastického modelu materiálu, proto se snažíme co nejpresněji stanovit tento rozměr a tím zamezit nevhodnému použití LELM [4].

#### 4.1. Důsledky plastické zóny

Díky zplastizování materiálu se zvětší deformace a zmenší se napětí, což má za důsledek přerozdělení napětí. Irwin tuto skutečnost vzal v úvahu a vytvořil zjednodušený model plastické zóny ve tvaru kružnice s poloměrem  $r_p$  (obr.4.1) [2].



Obrázek 4.1: grafické znázornění Irwinova odhadu velikosti a tvaru plastické zóny, vyšrafovaná oblast znázorňuje překročení meze kluzu. Napětí v této oblasti je v reálném tělese přerozděleno [2]

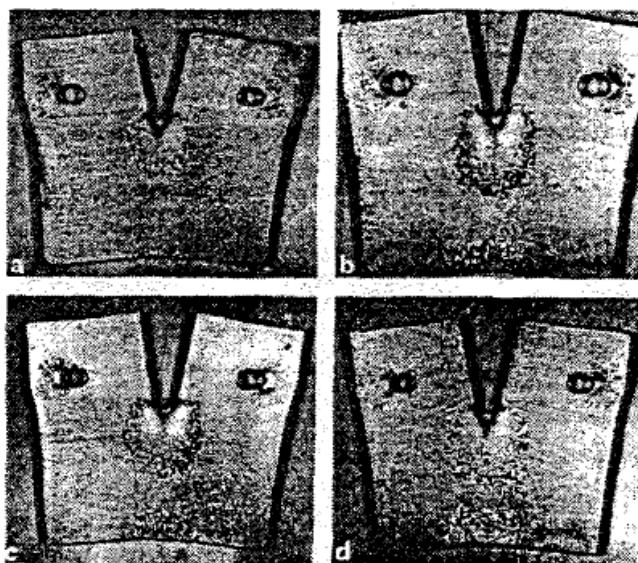
Přesnější modely plastické zóny vznikly dosazením rovnic pro napětí v okolí čela trhliny (3.6, 3.7, 3.8) do podmínek plasticity HMM a max  $\tau$ . Tyto modely přináší výhodu např. při analýze napjatosti na čele vyhnutých trhlin.

#### 4.2. Metody stanovení plastické zóny

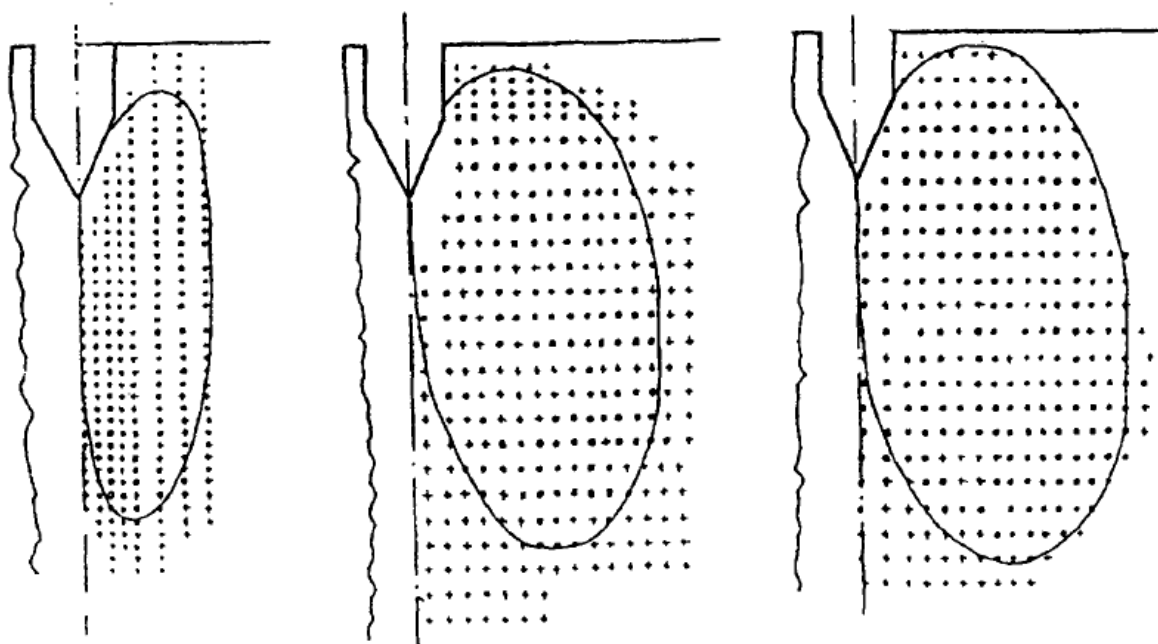
Velikost a tvar plastické zóny můžeme stanovit pomocí experimentálních metod, numerického výpočtu, nebo analytického výpočtu [4].

#### 4.2.1. Experimentální stanovení

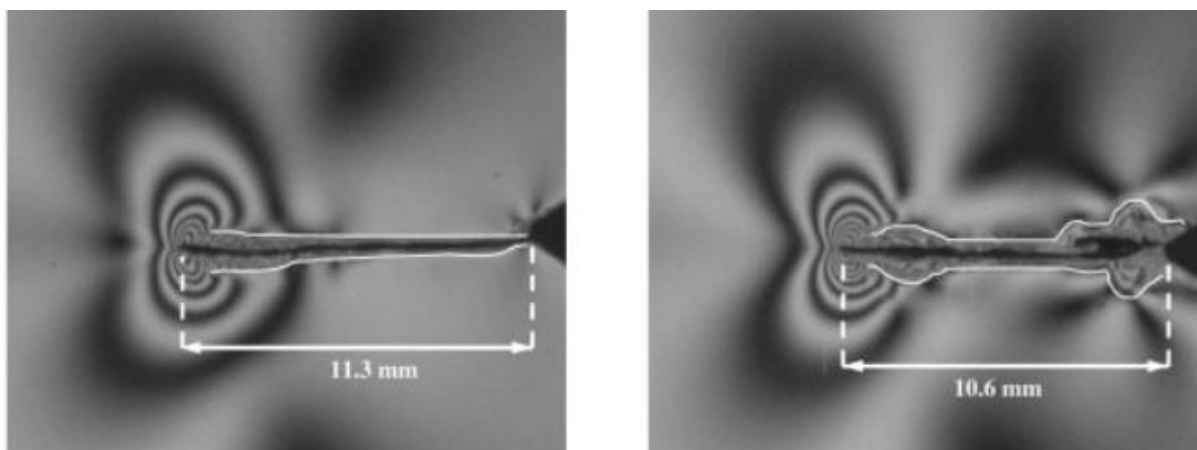
Stanovení plastické zóny experimentálním způsobem můžeme např. pomocí metody rekrytalizace (obr. 4.2), metodou měření tvrdosti (obr. 4.3), pomocí fotoelasticimetrie (obr. 4.4) atd. [4].



*Obr.4.2: Plastická zóna stanovená metodou rekrytalizace [10]*



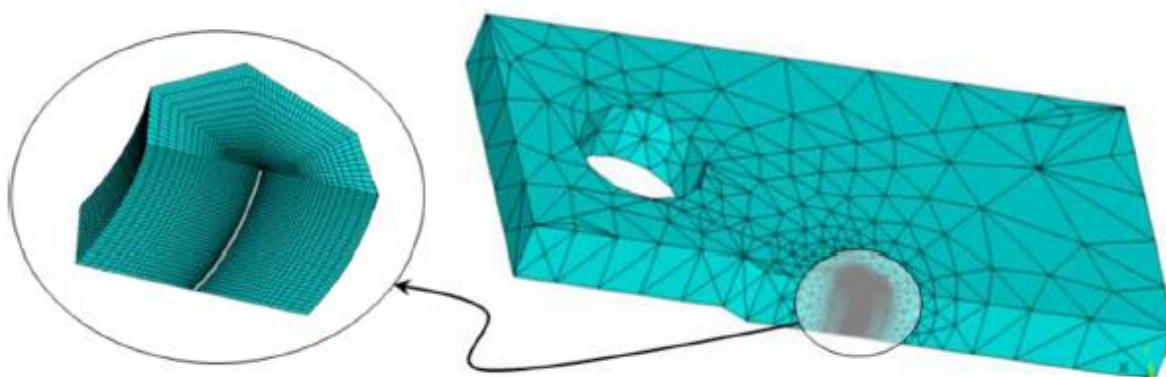
*Obr.4.3: Plastická zóna stanovená zkouškou tvrdosti dle Vickerse [10]*



*Obr.4.4: Experimentální stanovení plastické zóny pomocí fotoelasticimetrie [11]*

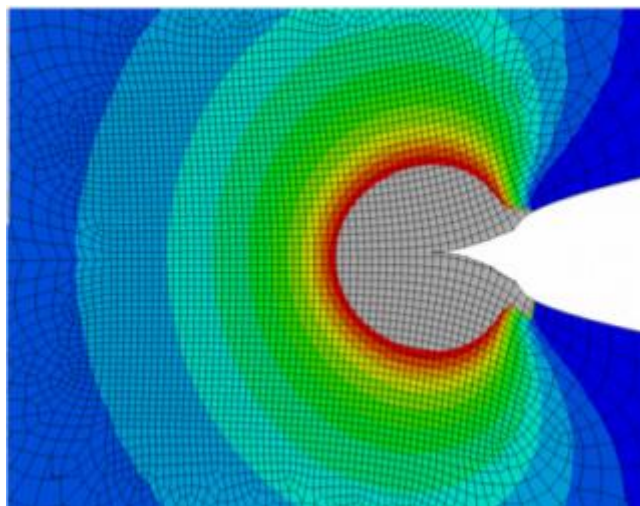
#### **4.2.2. Numerické řešení**

Velikost a tvar plastické zóny se může stanovit numericky pomocí metody konečných prvků (MKP).



*Obr.4.4: model vzorku MKP [12]*

Při modelování těles s trhlinou je nutné použít vysoký počet prvků sítě v okolí trhliny, což má za následek dlouhý výpočetní čas.



*Obr.4.5: Příklad numericky stanovené plastické zóny [11]*

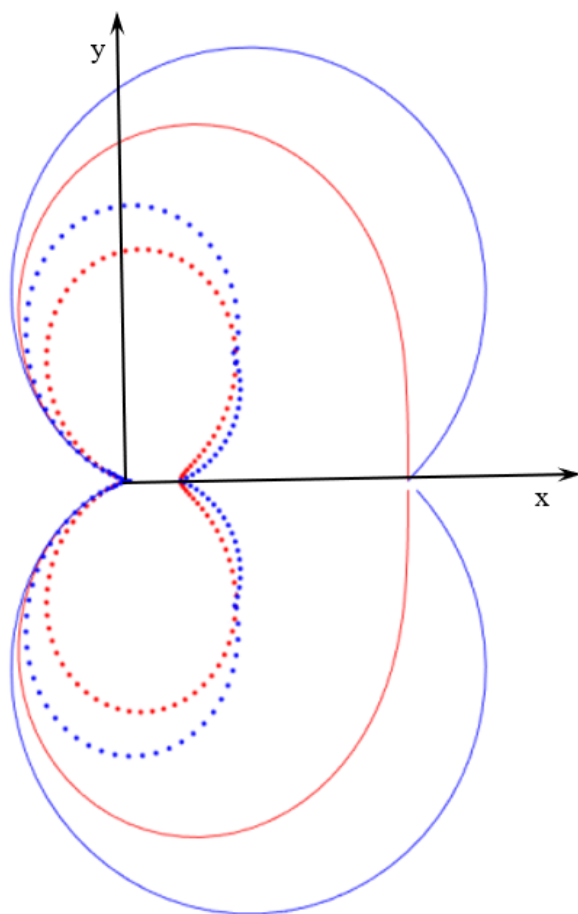
## 5. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

Pro stanovení velikosti a tvaru plastické zóny na čele trhliny analytickým přístupem se dosadí rovnice popisující pole napětí v okolí čela trhliny ((3.6) pro mód I, (3.7) Mód II a (3.8) mód III) do vztahu (3.10), (3.11), (3.12) pro výpočet hlavních napětí (v případě módu III se využije charakteristické rovnice (3.13)). Tato vypočítaná hlavní napětí se následně dosadí do podmínek plasticity HMM (3.14) nebo  $\max \tau$  (3.16).

Tím se získá redukované napětí, jako funkce úhlu  $\theta$ . Dále je potřeba vyjádřit z rovnice poloměr plastické zóny  $r(\theta)$ , který určuje hranici oblasti, kde byla překročena mez kluzu, a došlo k plastické deformaci materiálu.

Všechny dosavadní kroky byly provedeny v programu Maple, kde se vypsaly uvedené rovnice a poloměr plastické zóny se vyjádřil z podmínek plasticity pomocí příkazu *Solve For Variable*. Následně bylo použito příkazu *Language Conversion* pro převedení rovnice poloměru plastické zóny do jazyku programu Matlab. Do programu Matlab se zadaly požadované konstanty, v tomto případě: součinitel intenzity napětí  $K=30\text{MPa}\sqrt{m}$  (délka trhliny  $a=13\text{ mm}$ , napětí pro daný zatěžovací mód  $\sigma=150\text{MPa}$ ), mez kluzu  $R_p=300\text{MPa}$ , mez kluzu ve smyku  $\tau=\frac{1}{2}R_p$ , Poissonův poměr  $\mu=0,29$ . Úhel  $\theta$  se použil na intervalu  $(0;2\pi)$  s krokem 0,005. Z programu MAPLE se zkopírovaly převedené rovnice do vytvořeného skriptu v Matlabu. Pro vykreslení grafů se využilo příkazu *polarplot*. Tento příkaz využívá vstupů  $\theta$  a  $r$  a na požadované oblasti vykreslí grafy v polárních souřadnicích.

## 5.1 Múd I



Obr. 5.1: Modely plastické zóny tahového módu.

*HMH, rovinná napjatost – červená čára*

*max  $\tau$ , rovinná napjatost – modrá čára*

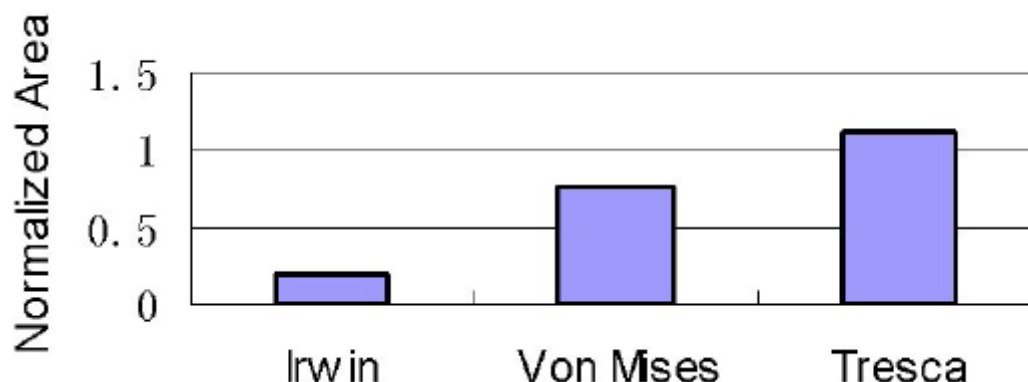
*HMH, rovinná deformace – červené puntíky*

*max  $\tau$ , rovinná deformace – modré puntíky*

### 5.1.1 Vyhodnocení módu I

Z vykreslených grafů můžeme vypořadovat jak u rovinné napjatosti (RN), tak i u rovinné deformace (RD) větší plochu při použití podmínky max  $\tau$  a také rozdílný tvar. Rozdíl pochází z podstaty kritérií a činí přibližně 14 % [8].

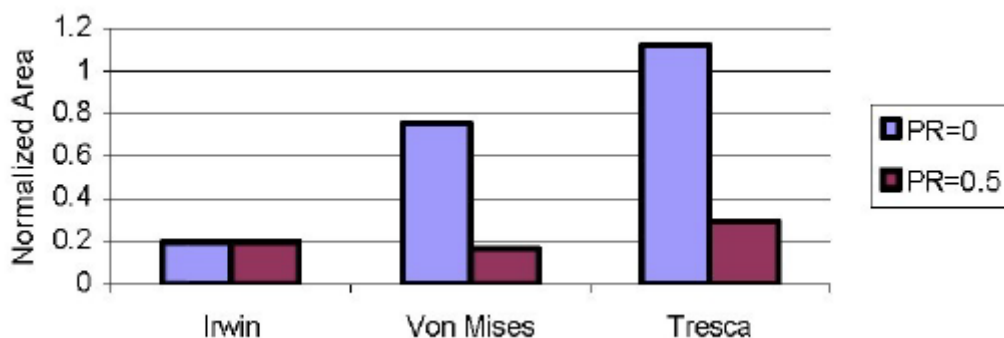
Pomocí integrací rovnice poloměru plastické zóny  $r(\theta)$  (postup získání rovnice poloměru plastické zóny je uveden v 5. kapitole) lze určit plochu plastické zóny pro dané podmínky (obr. 5.2) [13].



Obr. 5.2: porovnání normalizovaných velikostí ploch plastické zóny jednotlivých přístupů při rovinné napjatosti. [13]

Důležitým faktem je stejný rozměr plastické zóny pro obě podmínky plasticity, jestliže  $\theta=0$  pro RN i RD. Tento rozměr je také shodný s Irwinovým odhadem plastické zóny, jenž pro zjednodušení uvažoval tvar kružnice.

Za povšimnutí také stojí poměr velikostí RN a RD. Uvažujeme-li RN, z grafu můžeme vyčíst přibližně 3x větší hodnotu plastické zóny pro  $\theta=0$ . Tento výsledek je v souladu s obr. 3.5.. Parametrem ovlivňující tvar a velikost plastické zóny za podmínky rovinné deformace je příčná kontrakce neboli Poissonův poměr  $\mu$ . Čím je hodnota  $\mu$  větší, tím menší bude plastická zóna na čele trhliny.



Obr. 5.3: Porovnání velikosti plastické zóny pro  $\mu=0$  (RN) a  $\mu=0,5$  (RD) [13]

### 5.1.3. Efektivní součinitel intenzity napětí

Jelikož se při zatížení tělesa s trhlinou přerozdělí napětí na čele trhliny (obr 4.1), zvětší se tím i délka trhliny – efektivní délka trhliny  $a_{eff}$ , což má za následek vyšší hodnotu součinitele intenzity napětí  $K$  – efektivní součinitel napětí  $K_{eff}$ .

$$K_{eff} = Y(a_{eff}) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{eff}} \quad 5.1$$

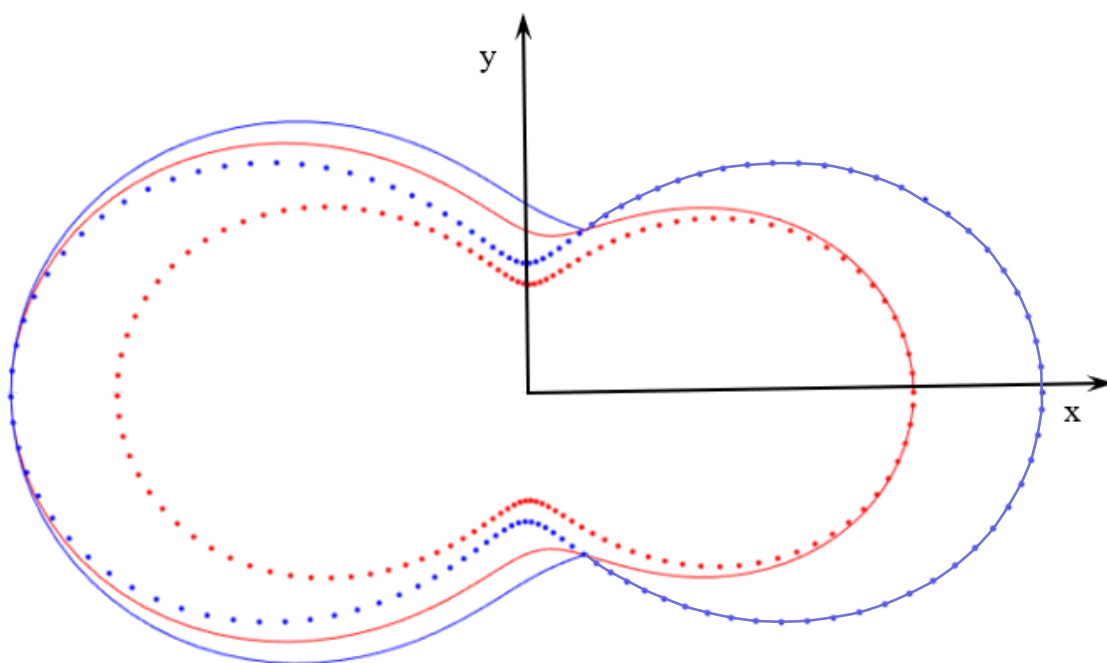


Tvarová funkce  $Y(a_{eff})$  je funkcí délky trhliny, proto se musí rovnice řešit iteračně, avšak v některých případech je možné  $K_{eff}$  vyjádřit analyticky. Např. pro nekonečně velkou desku s centrální trhlinou zatíženou v módu I je efektivní součinitel intenzity napětí určen vztahem [2].

$$K_{eff} = \frac{\sigma \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{R_p} \right)}} \quad 5.2$$

Dosadíme-li do rovnice (5.2) získáme porovnání hodnot  $K$  a  $K_{eff}$ . Součinitel intenzity napětí se zvětší z hodnoty  $K=30\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  na hodnotu  $K_{eff}=32,4\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

## 5.2 Mód II



Obr. 5.4: Modely plastické zóny rovinného smykového módu

*HMH, rovinná napjatost – červená čára*

*max  $\tau$ , rovinná napjatost – modrá čára*

*HMH, rovinná deformace – červené puntíky*

*max  $\tau$ , rovinná deformace – modré puntíky*

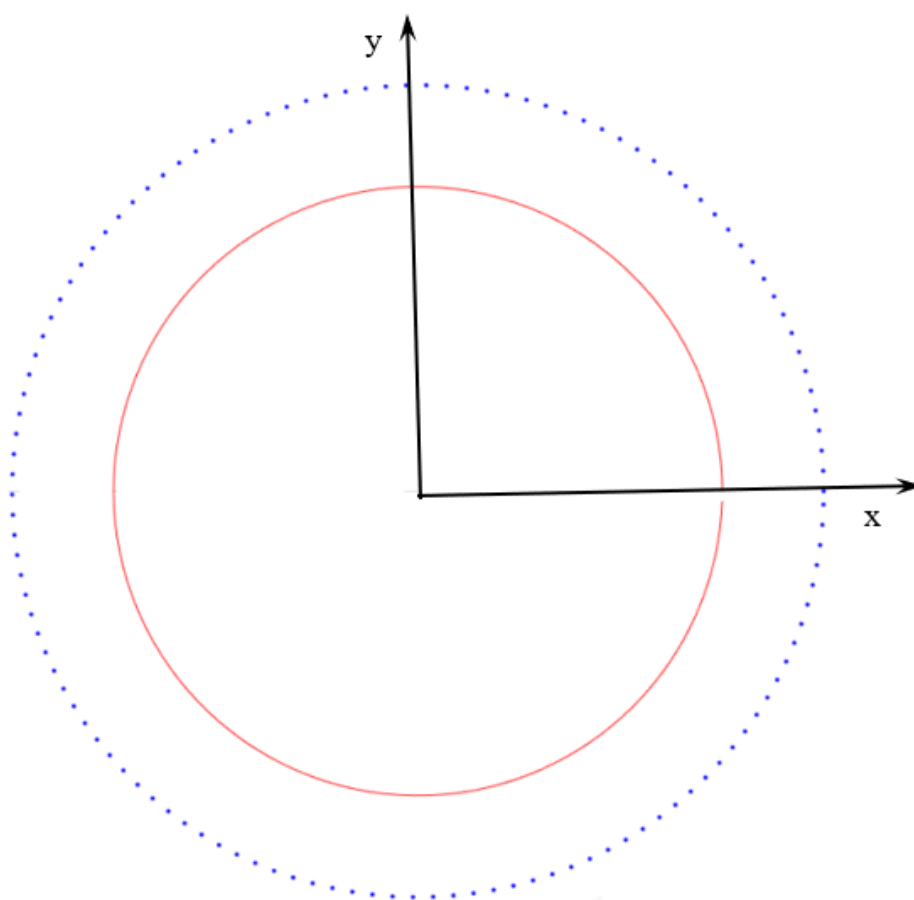
### 5.2.1 Vyhodnocení módu II

Stejně jako u módu I dostaneme aplikací podmínky  $\max \tau$  větší plochu plastické zóny na čele trhliny, než při aplikaci podmínky HMH, to platí jak u RD i u RN.

Pokud  $\theta=0$  a příčná kontrakce nenabývá vysokých hodnot, velikost plastické zóny je pro podmínku  $\max \tau$  stejná při RD i RN, rozdíl je pouze ve velikosti ploch.

Pro podmínku HMH, pokud  $\theta=0$ , se velikost zmenšuje s rostoucím  $\mu$ . Tato varianta se zdá z fyzikálního hlediska přijatelnější. Přesto se RN a RD v pravé straně pro  $\theta=0$  setkávají, což také stojí za pozornost.

## 5.3 Múd III



Obr. 5.5: Modely plastické zóny smykového módu

*HMH – červená čára*

*$\max \tau$  – modré puntíky*

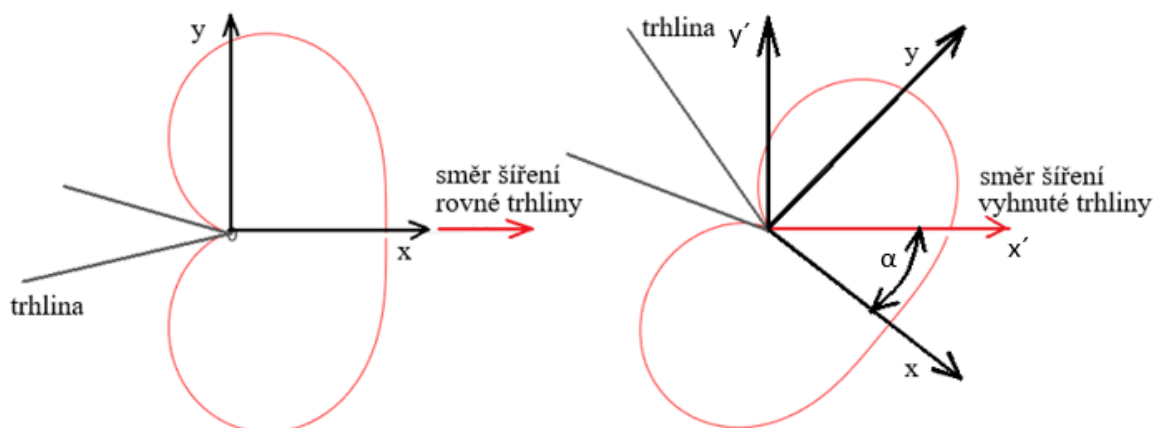
### 5.3.1 Vyhodnocení módu III

Obdobně jako u předchozích módů plocha plastické zóny získaná pomocí podmínky plasticity  $\max \tau$  je větší než při užití podmínky HMM.

## 6. VELIKOST PLASTICKÉ ZÓNY VYHNUTÉ TRHLINY

Jak již bylo řečeno, stanovení velikosti a tvaru plastické zóny nachází uplatnění např. při analýze vyhnutých trhlin. Pokud je délka vyhnutí podstatně kratší než délka přímé trhliny, je možné pole napětí popsat transformací rovnic (3.6) až (3.8) do nových souřadnic  $x'$ ,  $y'$ , které jsou otočeny o úhel vyhnutí  $\alpha$  vzhledem k původnímu souřadnému systému  $x$ ,  $y$  [14]. Tím se změní složky tenzoru napětí i délka plastické zóny ve směru šíření trhliny, avšak její tvar a velikost zůstává zachována (obr. 6.1).

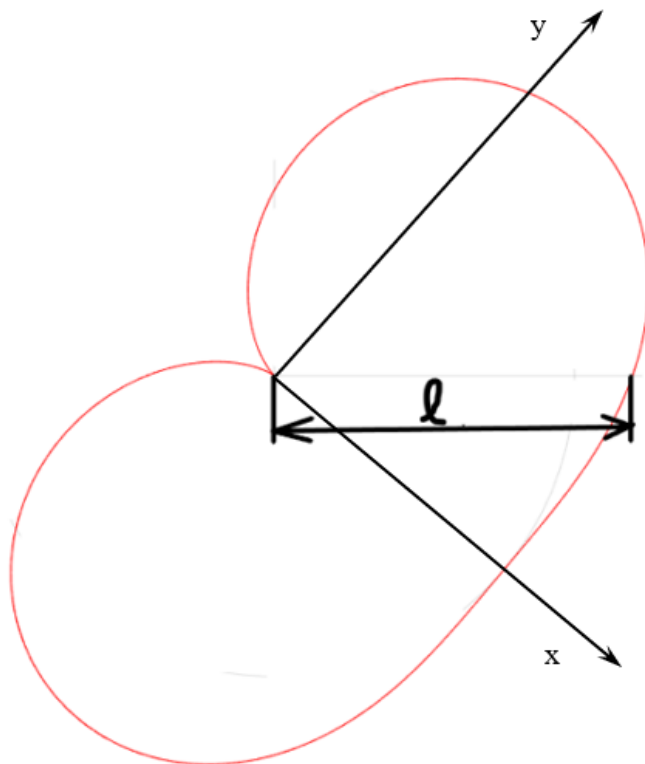
Pro vyhnuté trhliny je možné stanovit některé charakteristické rozměry, jako celkovou výšku  $h$  (obr. 6.4) a délku  $l$  ve směru šíření (obr. 6.2) pro některé úhly  $\alpha$ .



Obr.6.1: směr šíření rovné a vyhnuté trhliny,  $\alpha$  – úhel vyhnutí trhliny

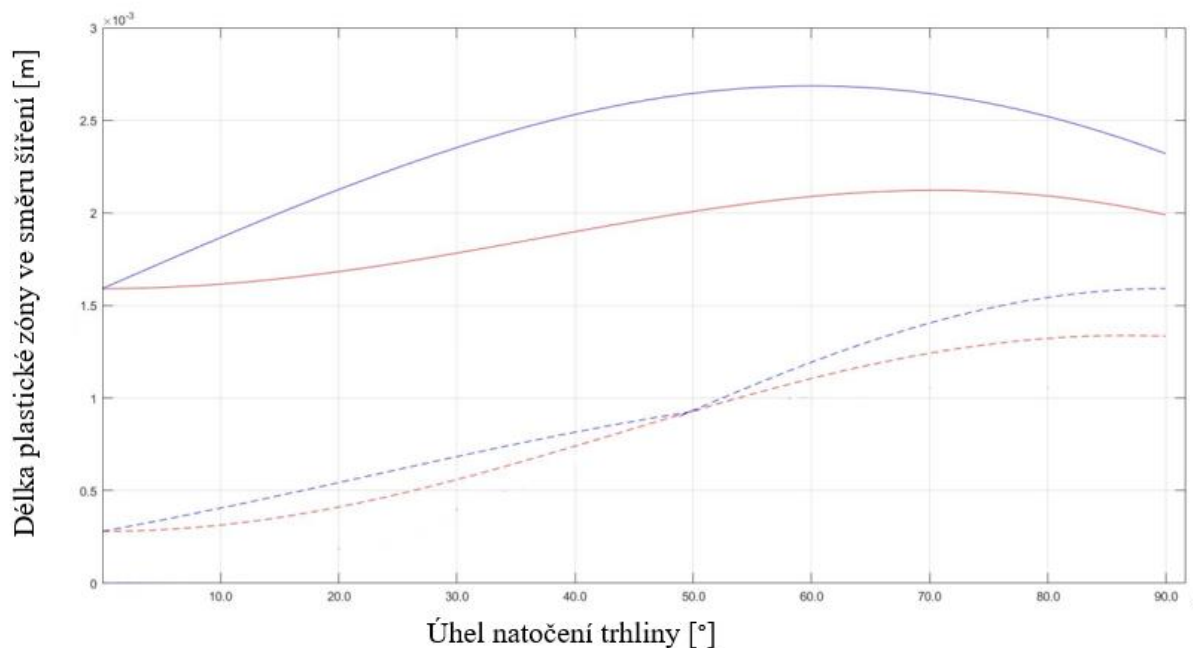
### 6.1. Délka plastické zóny ve směru šíření

Následná analýza byla provedena pro stejné parametry jako u rovné trhliny, natočení grafu se dosáhlo přičtením úhlu  $\alpha$  k úhlu  $\theta$ . Nyní nás zajímá rozměr  $l$  (obr.6.2) pro podmínky plasticity HMH a  $\max \tau$  ve stavu rovinné napjatosti a rovinné deformace pro mód I.



Obr.6.2: délka plastické zóny ve směru šíření  $l$ , HMH, RN, mód I

Pro lepší představu změny délky plastické zóny ve směru šíření vyhnuté trhliny se může namísto polárních souřadnic využít kartézských souřadnic (obr.6.3).



Obr.6.3: délka plastické zóny ve směru šíření v závislosti na úhlu vyhnutí, mód I

*HMH, rovinná napjatost – červená čára*

*max  $\tau$ , rovinná napjatost – modrá čára*

*HMH, rovinná deformace – červená čerchovaná čára*

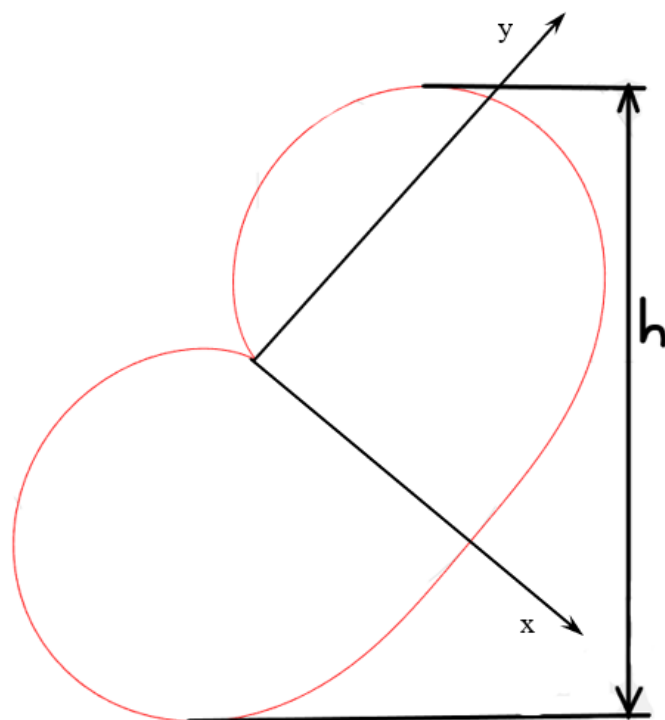
*max  $\tau$ , rovinná deformace – modrá čerchovaná čára*

$\alpha$ [°]	$l$ [mm]-HMH, RN	$l$ [mm]- max $\tau$ , RN	$l$ [mm]-HMH, RD	$l$ [mm]- max $\tau$ , RD
0- rovná trhlina	1,6	1,6	0,28	0,28
10	1,6	1,9	0,31	0,41
20	1,7	2,1	0,41	0,54
30	1,8	2,4	0,56	0,68
40	1,9	2,5	0,74	0,82
50	2	2,6	0,93	0,93
60	2,1	2,7	1,1	1,2
70	2,1	2,6	1,2	1,4

Tab. 6.1: číselné hodnoty délky plastické zóny ve směru šíření pro některé úhly vyhnutí

## 6.2. Výška plastické zóny vyhnuté trhliny

Dalším charakteristickým parametrem může být výška plastické zóny  $h$  u vyhnuté trhliny (obr.6.4).

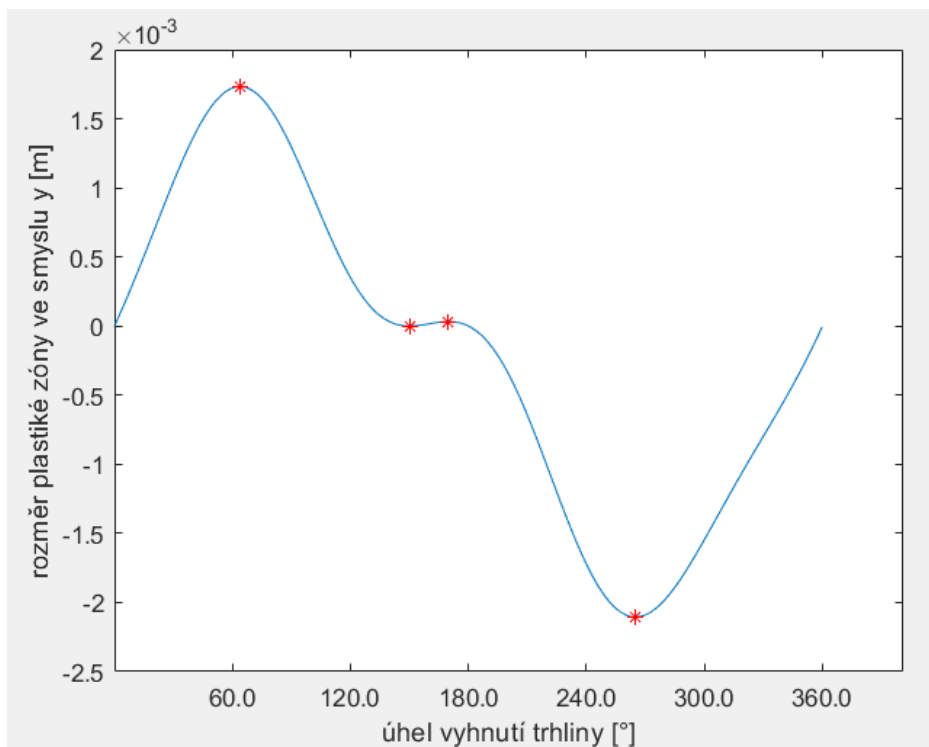


Obr.6.4: Výška vyhnuté trhliny  $h$ ,  $HMH$ ,  $RN$ , mód I

Pro získání tohoto rozměru musíme zjistit maximální hodnotu souřadnice  $y$  v kladném a záporném smyslu osy  $y$  plastické zóny a následně je sečíst. Využije se rovnice popisující vyhnutou plastickou zónu  $r(\theta)$ , a jelikož nás zajímá pouze průmět do osy  $y$ , použije se goniometrické funkce sinus a dostáváme funkci  $f(\theta)$  popisující výšku plastické zóny ve směru  $y$ .

$$f(\theta) = r(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad 6.1$$

Extrémy, reprezentující maximální a minimální rozměry plastické zóny ve směru y, můžeme získat v programu Matlab pomocí funkce *Islocalmin* a *Islocalmax*.



Obr.6.5: výška plastické zóny na čele trhliny  $h$  v závislosti na úhlu vyhnutí s vyznačenými extrémy, mód I, HMH, RN

$\alpha$ [°]	$h$ [mm]-HMH, RN	$h$ [mm]- max $\tau$ , RN	$h$ [mm]-HMH, RD	$h$ [mm]- max $\tau$ , RD
0- rovná trhlina	4,2	5,0	2,6	3,2
10	4,1	5,0	2,6	3,2
20	4,0	4,9	2,6	3,0
30	3,8	4,7	2,4	3,0
40	3,7	4,5	2,3	2,6
50	3,4	4,2	2,1	2,4
60	3,1	3,8	1,8	2,2
70	2,8	3,5	1,6	1,9

Tab.6.4: hodnoty výšky plastické zóny pro některé úhly vyhnutí

### 6.3.Lokální součinitele intenzity napětí

Pro vyhnutou trhlinu dále můžeme stanovit lokální součinitele intenzity napětí  $k_I$  a  $k_{II}$ , které se vyjádří pomocí nominálních hodnot intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$  hlavní trhliny následujícím způsobem:

$$k_I = C_{11} \cdot K_I + C_{12} \cdot K_{II} \quad 6.2$$

$$k_{II} = C_{21} \cdot K_I + C_{22} \cdot K_{II} \quad 6.3$$

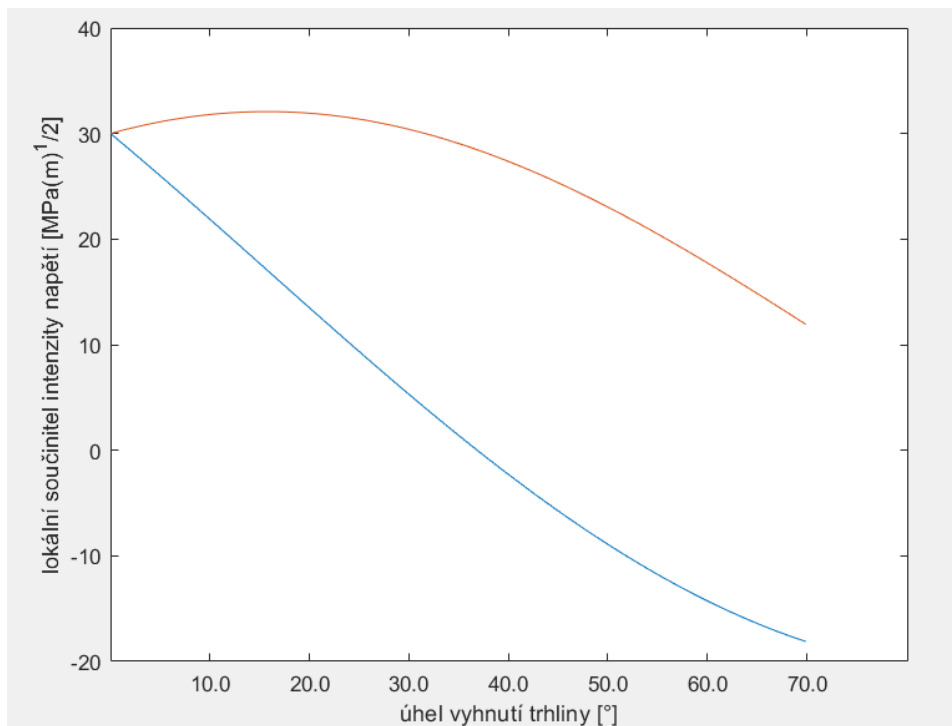
Příčemž koeficienty C jsou dány:

$$C_{11} = \frac{3}{4} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \quad 6.4a$$

$$C_{12} = -\frac{3}{4} \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] \quad 6.4b$$

$$C_{21} = \frac{1}{4} \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] \quad 6.4c$$

$$C_{22} = \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \quad 6.4d$$



Obr.6.6: hodnoty lokálních součinitelů intenzity napětí v závislosti na úhlu vyhnutí

$\alpha$ -úhel vyhnutí	$K_I$	$K_{II}$
[°]	$[MPa\sqrt{m}]$	
0 - rovná trhlina	30	30
10	21,9	31,8
20	13,5	31,9
30	5,3	30,4
40	2,3	27,4
50	8,9	23,0
60	14,3	17,7
70	18,1	11,9

Tab. 6.5: hodnoty lokálních součinitelů intenzity napětí pro vybrané úhly



## 7. ZÁVĚR

Výsledné grafy znázorňují změny tvarů a velikostí plastických zón při aplikaci podmínek plasticity HMH a  $\max \tau$  při RD a RN. Pro snazší porovnání jednotlivých variant bylo použito stejných materiálových charakteristik (Youngův modul pružnosti v tahu  $E$ , příčná kontrakce, neboli Poissonovo číslo  $\mu$  a mez kluzu  $R_P$ ) a stejných součinitelů intenzit napětí.

Toto porovnání znázorňuje rozdíly mezi použitými podmínkami plasticity, z nichž můžeme vypožarovat ve všech případech větší plochu plastické zóny při aplikaci meze elasticity podle  $\max \tau$ . Tento fakt je dán rozdílnou formulací podmínek.

Oproti tahovému módu I, velikost plastické zóny při zatížení v módech II a III nemá při aplikování HMH a  $\max \tau$  podmínek stejnou hodnotu ve směru šíření trhliny, tedy osy  $x$ .

Aplikací podmínky  $\max \tau$  módu II dostáváme při nízkých hodnotách  $\mu$  téměř totožnou velikost plastické zóny při RD a RN a totožnou délku ve směru osy  $x$  pro RN a RD.

Mód III udává jak pro  $\max \tau$  i HMH pouze jedno řešení ve tvaru kružnice.

Z analýzy řešení také vyplývá, mimo jiné, že velikost plastické zóny roste kvadraticky se zvětšujícím se součinitelem intenzity napětí, naopak klesá s druhou mocninou rostoucí meze kluzu  $R_{P0,2}$ .

Analýza vyhnuté trhliny poskytuje reálnější pohled na trhliny vyskytující se v nehomogenním materiálu, kde dráha šíření trhliny není obecně přímka, ale je různě zakřivená. Tyto údaje můžou sloužit k přesnějšímu odhadu chování šíření trhlín.

HMH je z mého pohledu, především při RD, na tuto konkrétní aplikaci vhodnější, jelikož je modelování jednodušší.

## 8. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BROEK, D. Elementary engineering fracture mechanics. 4th rev. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986. ISBN 90-247-2580-1.
- [2] ANDERSON, T. Fracture mechanics: fundamentals and applications. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2005. ISBN 978-0849316562. 978-1-4200-5821-5.
- [3] ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a JANÍČEK, P. Mechanika těles - pružnost a pevnost II. Brno: Vysoké učení technické, 1988. ISBN 80-214-2214-9.
- [4] KUNZ, J. Základy lomové mechaniky. Vyd. 3. přeprac. Praha: České vysoké učení technické, 2000. ISBN 80-010-2248-X.
- [5] WOLFGANG, B. Plasticity and fracture. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN 9783319627519.
- [6] XIN, G., HANGONG, W., XINGWU, K. a LIANGZHOU, J. Analytic solutions to crack tip plastic zone under various loading conditions. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2010, 29(4), 738-745. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.03.003. ISSN 09977538. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753810000434>

- [7] Maiti, S. (2015). Linear Elastic Fracture Mechanics. In *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* (pp. 6-64). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781316156438.003. b.r.
- [8] JANÍČEK, P., VRBKA, J. a ONDRÁČEK, E. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.
- [9] JANSSEN, M., ZUIDEMA, J. a WANHILL, R. J. H. *Fracture mechanics*. 2nd ed. Delft: VSSD, 2002. ISBN 90-407-2221-8.
- [10] CZOBOLY, E., CSIZMAZIA, B. a HAVAS, I. Experimental determination of plastic zones. *Materials Science* [online]. 1996, 32(1), 87-98 [cit. 2020-05-10]. DOI: 10.1007/BF02538929. ISSN 1068-820X. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF02538929>
- [11] COLOMBO, C. a VERGANI, L. A. Numerical and experimental study of crack tip shielding in presence of overloads. *Engineering Fracture Mechanics* [online]. 2010, 77(11), 1644-1655 [cit. 2020-05-10]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.011. ISSN 00137944. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794410001384>
- [12] CAMAS, D., LOPEZ-CRESPO, P., GONZALEZ-HERRERA, A. a MORENO, B.. Numerical and experimental study of the plastic zone in cracked specimens. *Engineering Fracture Mechanics* [online]. 2017, 185, 20-32 [cit. 2020-05-10]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.02.016. ISSN 00137944. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794417301005>
- [13] JING, P. a KHRAISHI, T. Analytical Solutions for Crack Tip Plastic Zone Shape Using the Von Mises and Tresca Yield Criteria: Effects of Crack Mode and Stress Condition. *Journal of Mechanics*. 2004, 20(3), 199-210. DOI: 10.1017/S1727719100003415. ISSN 1727-7191. Dostupné z: [https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S1727719100003415/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S1727719100003415/type/journal_article)
- [14] LAWN, B. R. *Fracture of brittle solids*. 2nd ed. Cambridge University Press, 1993. ISBN 0-521-40176-3.